

Problem Set 23: 图论导引

提交截止时间：5 月 20 日 10:00

如无特意说明，以下（以及未来的 Problem Sets 中的）各题只考虑有限个点的图.

Problem 1

一个图的**度序列**是由该图的各个顶点的度按**非递增顺序**排列的序列。求下列各个图的度序列.

- a) K_5
- b) C_3
- c) W_4
- d) $K_{2,3}$
- e) Q_3

Problem 2

设无向图 G 有 \mathcal{V} 个顶点, \mathcal{E} 条边, $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G 中度最小和度最大的顶点的度, 证明 $\delta(G) \leq \frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}} \leq \Delta(G)$. (其中 $\frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{V}}$ 称为图的**顶点平均度**)

Problem 3

证明: 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个连通图, 且 $|V| = |E| + 1$, 则 G 中至少有一个度为 1 的顶点.

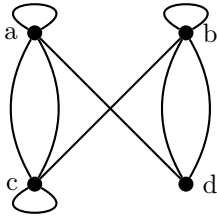
Problem 4

令 G 是一个顶点平均度为 a 的无自环的无向图.

- a) 证明: G 删去一个顶点 x 后平均度至少为 a , 当且仅当 $\deg(x) \leq \frac{a}{2}$;
- b) 证明或反驳: 如果 $a > 0$, 那么 G 有一个最小度大于 $\frac{a}{2}$ 的子图.

Problem 5

用邻接矩阵表示左侧的图；并画出右侧邻接矩阵表示的有向图.



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Problem 6

具有 4 个顶点的非同构简单图中，有多少个——

- 1) 包含 C_3 ?
- 2) 无孤立点?
- 3) 是二部图?

Problem 7

若简单图 G 和 H 是同构的, 证明 \bar{G} 和 \bar{H} 也是同构的.

Problem 8

若简单图 G 与 \bar{G} 是同构的, 则 G 称为自补图.

试证明：若图 G 是自补图，则图 G 的顶点数 ν 满足 $\nu \equiv 0, 1 \pmod{4}$.

Problem 9

具有 n 个顶点的非同构的简单图有多少个? 其中 n 是:

- [illegible]

Problem 10

证明 [下页左图] 和 [下页右图的补图] 同构.

